Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Схема заполнения

Для билета

Вариант задания 2

Лист работы 1 из 3

№1

Маша + Кирилл = 10 мин

Артур + Кирилл = 15 мин

Маша + Артур = 18 мин.

Пусть Маша съест полную корзинку за $a$ мин $\Rightarrow$ её производительность равна $\frac{1}{a}$ /мин; Кирилл – за $b$ мин $\Rightarrow$ его пр-ть – $\frac{1}{b}$ /мин; Артур за $c$ мин, его пр-ть – $\frac{1}{c}$ /мин

Тогда:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{10} \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{15} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{18} \end{cases}$$

Сложим м/у собой левые и правые части всех выражений в системе и получим:

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18}$$

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{2}{9} \mid \cdot 2; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{9} \Rightarrow$$ Маша, Артур и Кирилл вместе сведят всю корзинку ягод за 9 мин.

~~Ответ 9 минут~~

Но они должны съесть 2 таких корзиночки значит они сведят их за $9 \cdot 2 = 18$ мин.

Ответ 18 минут.



Можно использовать оборот листа для записи решений

№2

$(y-1)(4x+8) = 3x^2 - x - 14$

Посчитаем дискриминант для правой части ур-я:

$D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 14 = 169 = 13^2$

$$\begin{cases} x = \frac{1+13}{6} \\ x = \frac{1-13}{6} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{14}{6} \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$3x^2 - x - 14 = 3(x+2)(x - \frac{14}{6}) =$

$= (x+2)(3x-7)$

$(y-1)(4x+8) = (x+2)(3x-7)$

$4(y-1)(x+2) = (x+2)(3x-7)$

$4(y-1) = 3x - 7$

$4y - 4 = 3x - 7$

$\Downarrow$

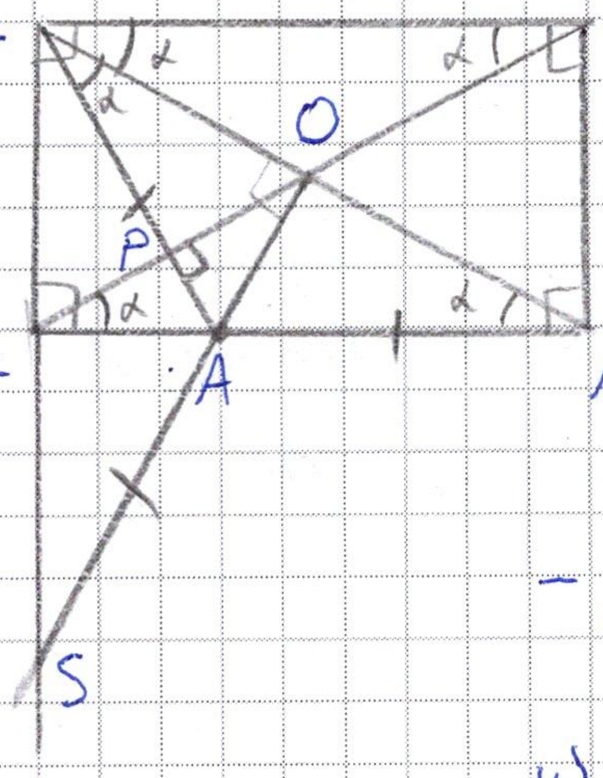
$$\begin{cases} y = \frac{3(x-1)}{4} \\ x = \frac{4y+3}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$x - 1 \vdots 4$

$y \vdots 3$

Ответ: для $y \vdots 3$ и $x - 1 \vdots 4$ существует пара чисел $(x; y)$, находящихся по формулам $y = \frac{3(x-1)}{4}$; $x = \frac{4y+3}{3}$

№5




Реш-е:

а) 1) Пусть $\angle ONA = \alpha \Rightarrow \angle ALO = \alpha$ (по св-ву р/б треуг-ка)

2) $\angle NLM = \alpha$ (как накрест леж. при $LM \parallel KN$ и сек. $LN$)

3) $\angle LMO = \alpha$ (т.к. диагонали пр-ка делятся точкой пересечения пополам, и они равны $\Rightarrow \triangle LOM$ – р/б и углы при основании равны)

Аналогично $\angle OKN = \alpha$ в р/б $\triangle KON$

4) $\angle ALM + \angle LMK = 90 = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 30°$;

$\angle ALK = 30°$

olymp.bmstu.ru

№4

1) Упростим числитель дроби:

$x^3+(x-2)^2-(x^2-2)x-12 = x^3+x^2-4x+4-x^3+2x-12 =$

$= x^2-2x-8$

$D = 4+4\cdot 8 = 36 = 6^2$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{2+6}{2} \\ x=\frac{2-6}{2} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right. ) \Rightarrow x^2-2x-8 = (x-4)(x+2)$

2) ~~Решение~~ Упростим знаменатель:

$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} - x = \sqrt{\frac{48}{3}} - x = \sqrt{16} - x = 4-x = -(x-4)$

3) Получим $\left| -\frac{(x-4)(x+2)}{x-4} \right| = a^2+2$ ОДЗ: $x \neq 4$

$\left| \frac{(x-4)(x+2)}{x-4} \right| = a^2+2$

4) Рассмотрим:

I. $x+2 = a^2+2$

$x = a^2$

II. $x+2 = -a^2-2$

$x = -(a^2+4)$

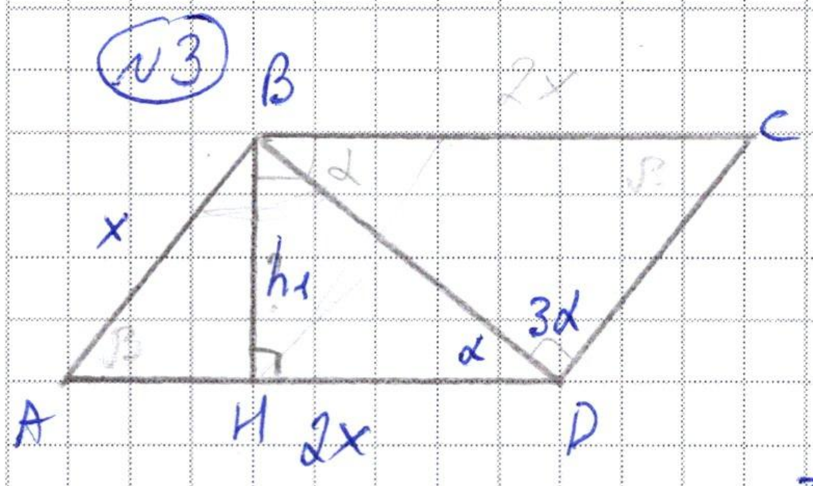
$x < 0$ (не подходит)

Поскольку $x \neq 4 \Rightarrow |a| \neq 2$

Поскольку $x > 0$ по усл. $\Rightarrow$ ~~$a \neq 0$~~ $a \neq 0$

Ответ: для I сл. при всех значениях a кроме $-2; 0; 2$

№3




Реш-е:

1) В $\triangle ABD$ $AD = 2AB$. Предположим он прямоугольный с $\angle ADB = 30°$

$\Rightarrow \angle ABD = 90°$

olymp.bmstu.ru

№5 продолжение.

5) Пусть $AN = AL = x$

Тогда $AK = \frac{x}{2}$ (т.к. в прямоуг. треуг-ке с углом 30° ($\angle ALK$) гипотенуза в 2 раза длиннее катета, лежащего против угла в 30°)

$\Rightarrow$ $AK : AN = 1 : 2$

Ответ: 1 : 2

б) Рем-е:

1) $LO = ON$ (т.к. диагонали делятся точкой пересечения пополам)

$\angle LAO = \angle OAN (= 2\alpha)$

$\Rightarrow$ ~~$\triangle AOL = \triangle AON$~~ (т.к. AO явл-ся медианой и сл-но биссектрисой в р/б треуг-ке ALN)

2) ~~$\angle OAL = 2\alpha$~~, $\angle LOK = 2\alpha$ и $\angle KOA = \alpha$

$\angle KAS = \angle OAN = 2\alpha$ (как верт. углы)

3) $\triangle KLA = \triangle KSA$ (прямоугольные) по катету и острому углу (т.к. AK – общ.; $\angle LAK = \angle KAS = 2\alpha$ (из п.2 и рис-я а))

$\Rightarrow$ $AL = AS = x$ (как соотв. эл. равн. треуг-ков); $KL = KS$ (" – " – ")

4) Найдём KL по т. Пифагора:

$$KL = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

5) $LS = KL + KS = 2KL = x\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $SL : LA = x\sqrt{3} : x = \sqrt{3} : 1$

Ответ: $\sqrt{3} : 1$

Сегмент $S_{\text{сегмента}} = \frac{\sqrt{\pi} r^2}{2} =$

$= \frac{\sqrt{\pi} \cdot 6}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{3} \cdot 2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt[4]{3}}$ . возведём в квадрат!

$\frac{9\pi^2}{\pi \cdot \sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{\frac{9\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt[4]{3}}$

$= \frac{\pi \cdot 36}{\pi\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{18\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}}$

2) Поделим на $\sqrt{\pi}$, чтобы найти $r$ : $\frac{6\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}}}{\sqrt{\pi}}$

$S = \sqrt{\pi} r^2 = \frac{36\sqrt{\pi}^2}{\sqrt{3}\sqrt{\pi}} = \frac{36\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2} S = \frac{18\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}$

№3 продолжение

2) $S_{\square} = ah \Rightarrow S_{ABCD} = h_1 \cdot 2x = BD \cdot x$

$BD = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = 10\sqrt{3}$

$BD = x\sqrt{3}$

$S = x^2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$x = \sqrt{10}$

3) ~~$2x \cdot h_1 = BD \cdot x \Rightarrow 20 BD = 10\sqrt{3}$~~

$BD = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x \cdot h_1 = 10\sqrt{3}$

$2\sqrt{10} \cdot h_1 = 10\sqrt{3}$

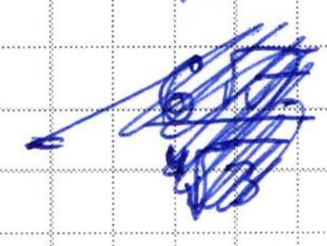
$\sqrt{40} \cdot h_1 = \sqrt{300}$

$h_1 = \sqrt{\frac{30}{4}} = \sqrt{\frac{15}{2}} = \sqrt{7{,}5}$

Ответ: $\sqrt{7{,}5}$

№6 Перемножим

1) Упростим ширину полукруглого желоба. $6\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}} =$



$= \pi \cdot r$, где $r$ – радиус полуокружности

2) Поделим на $\pi$, чтобы получить $r$: ~~для этого~~

$\frac{6\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}}}{\pi}$ возведём в квадрат: $\frac{36 \cdot \sqrt{\pi}}{\sqrt{3} \cdot \pi^2} = \frac{36}{\pi\sqrt{3}}$

$\sqrt{\frac{36}{\pi\sqrt{3}}} = \frac{6}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt[4]{3}} = r$